

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ

19 Ιουνίου 2014

Θέμα 1. (α') Δείξτε ότι το σύνολο $B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}\| \leq 1\}$ είναι φραγμένο, κλειστό, συμμετρικό (δηλ. $\forall \bar{x} \in B : -\bar{x} \in B$) και κυρτό (δηλ. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in B, \forall t \in [0, 1] : t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in B$).

(β') Έστω $f(x, y) = x^2 - y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Βρείτε στο σημείο $(1, 1)$ το εφαπτόμενο επίπεδο της f και την παράγωγο σε κάθε κατεύθυνση $\bar{v} \in \mathbb{R}^2, \|\bar{v}\| = 1$. Ποιά η σχέση των δύο;

Θέμα 2. (α') Δείξτε ότι η συνάρτηση $\mathbb{R}^n \ni \bar{x} \mapsto e^{\|\bar{x}\|}$ είναι συνεχής.

(β') Έστω

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(u, v, w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \sin(u+v+w)),$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x, y) = (e^x, \cos(y-x), e^{-y}).$$

Εξετάστε πόσες φορές είναι διαφορίσιμη η $f \circ g$ και υπολογίστε την παράγωγό της στο σημείο $(0, 0)$.

Θέμα 3. Εξετάστε σε ποιά σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

είναι συνεχής, μερικώς διαφορίσιμη, διαφορίσιμη, συνεχώς διαφορίσιμη.

Θέμα 4. Βρείτε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το μέγιστο πεδίο ορισμού $D_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ της συνάρτησης $\bar{x} \mapsto \|\bar{x}\|^\alpha$ και υπολογίστε, όπου υπάρχει, την κλίση της. Όπου υπάρχει η κλίση, είναι πάντα παράγωγος;

Θέμα 5. Έστω $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $\nabla f(\bar{x}) = g(\bar{x})\bar{x}$ για κάθε $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι κάθε σφαίρα κέντρου $\bar{0}$ και ακτίνας $r > 0$ περιέχεται σε ένα σύνολο στάθμης $c \in \mathbb{R}$ της f .

Θέμα 6. Έστω $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \|(x, y)\| < 1$. Βρείτε σε κάθε σημείο (x, y, z) του γραφήματος της f το εφαπτόμενο επίπεδο και ένα διάνυσμα $\bar{n} \in \mathbb{R}^3, \|\bar{n}\| = 1$, κάθετο στο επίπεδο. Ποιά η σχέση του \bar{n} με το (x, y, z) ;

Θέμα 7. Έστω $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \|(x, y)\| < 1$. Βρείτε ένα πολυώνυμο δεύτερου βαθμού $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists 0 < \delta < 1 : \|(x, y)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - p(x, y)| < \varepsilon(x^2 + y^2).$$

Θέμα 8. (α') Βρείτε τα μήκη των ακμών $a, b, c > 0$ ενός ορθογώνιου κουτιού όγκου $v > 0$, έτσι ώστε η επιφάνειά του να έχει το μικρότερο δυνατό εμβαδό.

(β') Βρείτε και χαρακτηρίστε τα τοπικά ακρότατα της $f(x, y) = x^2y - 2xy + y^3, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Θέμα 9. (α') Βρείτε τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f(x, y) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ υπό τη συνθήκη $x^2 + y^2 = 1$.

(β') Έστω $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες με

$$f(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Δείξτε ότι

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, y(x))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x, y(x))}.$$

Θέμα 10. (α') Δείξτε ότι μια συνάρτηση $\bar{f} = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη αν και μόνο αν οι $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$, είναι διαφορίσιμες και εκφράστε την παράγωγο της \bar{f} μέσω των παραγώγων των f_i .

(β') Έστω $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες. Δείξτε ότι $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε μία μονάδα. Μπορείτε να τα λύσετε με όποιο τρόπο θέλετε, αρκεί να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!